1.6 Gleichungen und Formeln

1.6.1 Arbeiten mit Gleichungen

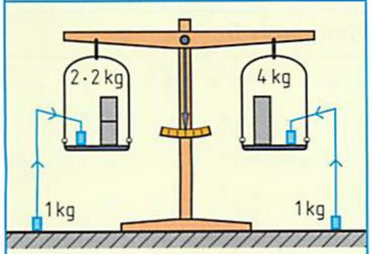
Eine Gleichung setzt zwei Terme gleich. Sie enthält Zahlen und Variablen.

16	=	3x – 5
Linke Seite, Linksterm	Gleichheitszeichen	Rechte Seite, Rechtsterm

Die Variable x ist ein Platzhalter für einen Zahlenwert. Um den Wert für x zu finden, müssen beide Terme so lange verändert werden, bis die gesuchte Größe (Variable) allein auf der linken Seite steht.
Eine Waage im Gleichgewicht veranschaulicht diese Regeln **(Tabelle 1)**. Dabei gelten die Regeln der äquivalenten (gleichwertigen) Umformung **(Tabelle 2)**.

Äquivalente Umformung: Man darf beide Seiten einer Gleichung gegeneinander vertauschen oder durch Rechnung gleichwertig verändern **(Tabelle 2)**.

Tabelle 1: Waage und Gleichung



Waage bleibt im Gleichgewicht

Linke Seite	= Rechte Seite
$2 \cdot 2\,\text{kg}$	$= 4\,\text{kg}$
$2 \cdot 2\,\text{kg} + \mathbf{1\,kg}$	$= 4\,\text{kg} + \mathbf{1\,kg}$

Tabelle 2: Regeln für das äquivalente Umformen von Gleichungen, Beispiele

Linke Seite, Linksterm = Rechte Seite, Rechtsterm	
Seiten gegeneinander vertauschen, z. B.:	$16 = 3x - 5 \Rightarrow 3x - 5 = 16$
gleichen Wert, z. B. 5, addieren:	$7x - 5 = 23 \Rightarrow 7x = 28$
gleichen Wert, z. B. 7, subtrahieren:	$5x + 7 = 25 \Rightarrow 5x = 18$
mit gleichem Wert, z. B. 5, multiplizieren:	$2x = 5 \Rightarrow 10x = 25$
durch gleichen Wert, z. B. 6, dividieren:	$6x = 18 \Rightarrow x = 3$
auf beiden Seiten Kehrwert bilden, z. B.:	$2/x = 5/3 \Rightarrow x/2 = 3/5$
auf beiden Seiten quadrieren, z. B.:	$x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$
auf beiden Seiten Wurzel ziehen, z. B.:	$x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$
beide Seiten logarithmieren, z. B.:	$e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5$

Tabelle 3: Gleichungen, Beispiele

Beispiel 1: Auflösen nach *x*

Ausgangsgleichung:	$\mathbf{16}$	$= \mathbf{3x - 5}$
5 addieren:	$16 + \mathbf{5}$	$= 3x - 5 + \mathbf{5}$
5 addiert	21	$= 3x$
Seiten vertauscht:	$3x$	$= 21$
Durch **3** teilen:	$\frac{3x}{\mathbf{3}}$	$= \frac{21}{\mathbf{3}}$
Lösung:	$\mathbf{x}$	$= \mathbf{7}$
Probe:	16	$= 3 \cdot \mathbf{7} - 5 \Rightarrow 16 = 16$

Beispiel 2: Auflösen nach *y*

Ausgangsgleichung:	$\frac{1}{\mathbf{2y - 3}}$	$= \mathbf{5}$
Kehrwert bilden:	$2y - 3$	$= \frac{1}{5}$
Mit **5** multiplizieren:	$(2y - 3) \cdot \mathbf{5}$	$= 0{,}2 \cdot \mathbf{5}$
Mit **5** multipliziert:	$10y - 15$	$= 1$
15 addieren:	$10y - 15 + \mathbf{15}$	$= 1 + \mathbf{15}$
15 addiert:	$10y$	$= 16$
Lösung:	y	$= \mathbf{1{,}6}$

Beispiel 3: Auflösen nach *z*

Ausgangsgleichung:	$\frac{\mathbf{5z^2}}{\mathbf{4}}$	$= \mathbf{80}$
Mit **4/5** multiplizieren:	$\frac{5z^2 \cdot \mathbf{4}}{4 \cdot \mathbf{5}}$	$= \frac{80 \cdot \mathbf{4}}{\mathbf{5}}$
Mit **4/5** multipliziert:	z^2	$= 64$
Wurzelziehen:	$\sqrt{z^2}$	$= \pm\sqrt{64}$
Lösung:	z	$= \pm\sqrt{\mathbf{64}} = \pm\mathbf{8}$

Beispiel 4: Auflösen nach *t*

Ausgangsgleichung:	$\mathbf{12 \cdot e^{-t/4}}$	$= \mathbf{6}$
Durch **12** geteilt:	$e^{-t/4}$	$= 0{,}5$
Logarithmiert:	$-t/4$	$= +\ln 0{,}5$
Vorzeichen umgekehrt:	$+t/4$	$= -\ln 0{,}5$
Lösung:	t	$= \mathbf{-4 \cdot \ln 0{,}5 = 2{,}77}$

1.6.2 Arbeiten mit Formeln

Formeln sind Gleichungen, die vorwiegend Formelzeichen, z.B. P, U und R, enthalten. Sie erfassen den mathematischen Zusammenhang zwischen physikalischen Größen **(Beispiele)**.

Für das Umstellen einer Formel und das Auflösen nach einer Größe **(Tabelle)** gelten dieselben Regeln wie für das Umformen und das Auflösen von Gleichungen **(Seite 17, Tabelle 2)**.

Die gesuchte Größe muss bei der Lösung allein auf einer Seite stehen.

Beispiele für Formelzeichen:

Formelzeichen	physikalische Größe
P	Leistung
U	Spannung
R	Widerstand

Tabelle: Umstellen und Auflösen von Formeln (Beispiele)

Beispiel 1: Auflösen nach U

Ausgangsformel:	$P = \frac{U^2}{R}$
Seiten vertauscht:	$\frac{U^2}{R} = P$
Mit R multipliziert:	$U^2 = P \cdot R$
Wurzel ⇒ **Lösung:**	$U = \sqrt{P \cdot R}$

Beispiel 2: Auflösen nach C

Ausgangsformel:	$T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$
Formel quadriert:	$T^2 = 4\pi^2 \cdot L \cdot C$
Formel durch $4\pi^2 \cdot L$ geteilt:	$\frac{T^2}{4\pi^2 \cdot L} = C$
Seiten vertauscht ⇒ **Lösung:**	$C = \frac{T^2}{4\pi^2 \cdot L}$

Beispiel 3: Auflösen nach I

Ausgangsformel:	$U = U_0 - I \cdot R_i$
U_0 subtrahiert:	$U - U_0 = -I \cdot R_i$
Seiten vertauschen:	$-I \cdot R_i = U - U_0$
Vorzeichen umgekehrt:	$I \cdot R_i = U_0 - U$
Durch R_i dividiert ⇒ **Lösung:**	$I = \frac{U_0 - U}{R_i}$

Beispiel 4: Auflösen nach b

Ausgangsformel:	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$
Formel quadriert:	$a^2 = c^2 - b^2$
b^2 addiert:	$a^2 + b^2 = c^2$
a^2 subtrahiert:	$b^2 = c^2 - a^2$
Wurzel ⇒ **Lösung:**	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Beispiel 5: Auflösen nach R_1

Ausgangsformel:	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
$\frac{1}{R_2}$ subtrahiert:	$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$
Hauptnenner $R_2 \cdot R$:	$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{R_2 \cdot R}$
Kehrwert ⇒ **Lösung:**	$R_1 = \frac{R_2 \cdot R}{R_2 - R}$

Beispiel 6: Auflösen nach R_2

Ausgangsformel:	$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R + R_2}$
Mit Nenner multipliziert:	$R \cdot (R_1 + R_2) = R_1 \cdot R_2$
Klammer auflösen:	$R \cdot R_1 + R \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2$
$R \cdot R_2$ subtrahiert:	$R \cdot R_1 = R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_2$
Seiten vertauschen:	$R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_2 = R \cdot R_1$
R_2 ausklammern:	$R_2 \cdot (R_1 - R) = R \cdot R_1$
Durch $(R_1 - R)$ dividiert ⇒ **Lösung:**	$R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$

Beispiel 7: Auflösen nach U

Ausgangsformel:	$L_U = 20 \cdot \lg \frac{U}{U_0}$
Durch 20 dividiert:	$\frac{L_U}{20} = \lg \frac{U}{U_0}$
Mit 10 potenziert:	$10^{\frac{L_U}{20}} = \frac{U}{U_0}$
Mit U_0 multipliziert:	$U_0 \cdot 10^{\frac{L_U}{20}} = U$
Seiten vertauschen ⇒ **Lösung:**	$U = U_0 \cdot 10^{\frac{L_U}{20}}$

Beispiel 8: Auflösen nach t

Ausgangsformel:	$u_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
Durch U_0 dividiert:	$\frac{u_C}{U_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$
Logarithmiert:	$\ln \frac{u_C}{U_0} = -\frac{t}{\tau}$
Vorzeichen umgedreht:	$-\ln \frac{u_C}{U_0} = \frac{t}{\tau}$
Mit τ multipliziert:	$-\tau \cdot \ln \frac{u_C}{U_0} = t$
Seiten vertauschen ⇒ **Lösung:**	$t = -\tau \cdot \ln \frac{u_C}{U_0}$

Aufgaben zu 1.6.2

Folgende Formeln sind umzuformen und aufzulösen:

1. a) $P = F \cdot v$ nach v; b) $M = F \cdot r$ nach F; c) $W = P \cdot t$ nach P; d) $U = R \cdot I$ nach R; e) $s = v \cdot t$ nach v; f) $P = M \cdot \omega$ nach ω; g) $m = \varrho \cdot V$ nach ϱ; h) $u = \pi \cdot d$ nach d

2. a) $V = l \cdot b \cdot h$ nach h; b) $v = d \cdot \pi \cdot n$ nach n; c) $U = v \cdot B \cdot l$ nach B; d) $X_L = 2\pi \cdot f \cdot L$ nach L

3. a) $U = U_1 + U_2$ nach U_2; b) $U = U_0 - U_i$ nach U_0; c) $\Delta t = t_1 - t_0$ nach t_0; d) $R_v = R - R_i$ nach R_i

4. a) $I = \dfrac{Q}{t}$ nach Q; b) $I = \dfrac{U}{R}$ nach U; c) $\eta = \dfrac{P_2}{P_1}$ nach P_1; d) $P = \dfrac{F \cdot s}{t}$ nach F; e) $R = \dfrac{l}{\gamma \cdot A}$ nach A; f) $U = \dfrac{F \cdot s}{Q}$ nach Q; g) $Q = \dfrac{\omega \cdot L}{R}$ nach R; h) $\Delta U = \dfrac{2 I \cdot l}{\gamma \cdot A}$ nach A;

5. a) $W = \dfrac{C \cdot U^2}{2}$ nach U; b) $Q_{bL} = \dfrac{U^2}{\omega \cdot L}$ nach L; c) $X = \dfrac{Q}{I^2}$ nach I; d) $C = \dfrac{Q_{bC}}{\omega \cdot U^2}$ nach U

6. a) $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ nach X_L; b) $T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$ nach L; c) $I_w = \sqrt{I^2 - I_{bL}^2}$ nach I_{bL}

7. a) $U = U_0 - I \cdot R_i$ nach R_i; b) $R_v = (n-1) \cdot R_m$ nach n; c) $P = (F_2 - F_1) \cdot v$ nach F_1

8. a) $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$ nach C_1; b) $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ nach R_1; c) $\dfrac{U_2}{U} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ nach R_1; d) $R_p = \dfrac{R_m}{n-1}$ nach R_m; e) $R_i = \dfrac{U_0 - U}{I}$ nach U; f) $R_1 = \dfrac{R_2 \cdot (U - U_{20})}{U_{20}}$ nach U

9. a) $u_c = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$ nach t; b) $i_L = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$ nach τ; c) $i_L = I_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$ nach t

1.6.2 Arbeiten mit Formeln

Lösungen zu 1.6.2

19/1.u. **a)** $v = \frac{P}{F}$ **b)** $F = \frac{M}{r}$ **c)** $P = \frac{W}{t}$ **d)** $R = \frac{U}{I}$

e) $v = \frac{s}{t}$ **f)** $\omega = \frac{P}{M}$ **g)** $\varrho = \frac{m}{V}$ **h)** $d = \frac{u}{\pi}$

19/2.u. **a)** $h = \frac{V}{l \cdot b}$ **b)** $n = \frac{v}{d \cdot \pi}$ **c)** $B = \frac{U}{v \cdot l}$; **d)** $L = \frac{X_L}{2\pi \cdot f}$

19/3.u. **a)** $U_2 = U - U_1$ **b)** $U_0 = U + U_i$ **c)** $t_0 = t_1 - \Delta t$ **d)** $R_i = R - R_v$

19/4.u. **a)** $Q = I \cdot t$ **b)** $U = R \cdot I$ **c)** $P_1 = \frac{P_2}{\eta}$ **d)** $F = \frac{P \cdot t}{s}$

e) $A = \frac{l}{\gamma \cdot R}$ **f)** $Q = \frac{F \cdot s}{U}$ **g)** $R = \frac{\omega \cdot L}{Q}$ h) $A = \frac{2I \cdot l}{\gamma \cdot \Delta U}$

19/5.u. **a)** $U = \sqrt{\frac{2 \cdot W}{C}}$ **b)** $L = \frac{U^2}{\omega \cdot Q_{bL}}$ **c)** $I = \sqrt{\frac{Q}{X}}$ **d)** $U = \sqrt{\frac{Q_{bC}}{\omega \cdot C}}$

19/6.u. **a)** $X_L = \sqrt{Z^2 - R^2}$ **b)** $L = \frac{T^2}{4\pi^2 \cdot C}$ **c)** $I_{bL} = \sqrt{I^2 - I_w^2}$

19/7.u. **a)** $R_i = \frac{U_0 - U}{I}$ **b)** $n = \frac{R_v + R_m}{R_m} = \frac{R_v}{R_m} + 1$ **c)** $F_1 = \frac{F_2 \cdot v - P}{v} = F_2 - \frac{P}{v}$

19/8.u. **a)** $C_1 = \frac{1}{\frac{1}{C} - \frac{1}{C_2}} = \frac{C_2 \cdot C}{C_2 - C}$ **b)** $R_1 = \frac{R_2 \cdot R}{R_2 - R}$ **c)** $R_1 = \frac{(U - U_2) \cdot R_2}{U_2} = R_2\left(\frac{U}{U_2} - 1\right)$

d) $R_m = R_p \cdot (n-1)$ **e)** $U = U_0 - R_i \cdot I$ **f)** $U = \frac{U_{20} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} = U_{20}\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)$

19/9.u. **a)** $e^{t/\tau} = \frac{U_0}{u_c} \Rightarrow t = \tau \cdot \ln\left(\frac{U_0}{u_c}\right) = -\tau \cdot \ln\left(\frac{u_c}{U_0}\right)$ **b)** $\frac{I_0}{i_L} = e^{t/\tau} \Rightarrow \tau = \frac{t}{\ln(I_0/i_L)}$

c) $I_0 \cdot e^{-t/\tau} = I_0 - i_L \Rightarrow e^{t/\tau} = \frac{I_0}{I_0 - i_L} \Rightarrow t/\tau = \ln\left(\frac{I_0}{I_0 - i_L}\right) \Rightarrow t = \tau \cdot \ln\left(\frac{I_0}{I_0 - i_L}\right)$