1.4 Potenzrechnen

1.4.1 Darstellung von Potenzen

Die Multiplikation gleicher Faktoren kann als Potenz geschrieben werden:

$a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a$ (n Faktoren) $= a^n$ (gelesen: „a hoch n")

z. B.: $5 \cdot 5 \cdot 5$ (3 Faktoren) $= 5^3$ (gelesen: „5 hoch 3")

Potenz

Basis (Grundzahl) → a^n ← Exponent (Hochzahl)

⇓

Erweiterter Potenzbegriff

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

z. B.: $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ *z. B.:* $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ *z. B.:* $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2}$

Vorzeichenregeln

Bei positiver Basis bleibt der Potenzwert positiv.

Bei negativer Basis und geradzahligem Exponenten (2, 4 ...) wird der Potenzwert positiv

z. B.: $(-3)^2 = (-3)\,(-3) = +9$

Bei negativer Basis und ungeradzahligem Exponenten (3, 5 ...) bleibt der Potenzwert negativ

z. B.: $(-3)^3 = (-3)\,(-3)\,(-3) = -27$

1.4.3 Grundrechenarten mit Potenzen

Addition und Subtraktion

Regel 1: **Nur Potenzen mit gleichen Basen und gleichen Exponenten lassen sich addieren oder subtrahieren.**

$a^n + \ldots + a^n$	(m Summanden)	$= m \cdot a^n$
z. B.: $2^3 + 2^3 + 2^3$	(3 Summanden)	$= 3 \cdot 2^3$

Multiplikation und Division

Regel 2: **Bei gleichen Basen wird die Basis mit der Summe oder der Differenz der Exponenten potenziert:**

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)} \quad \text{oder} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$$

Beispiele:

$5^3 \cdot 5^2 = 5^{(3+2)} = 5^5 = 3\,125$

$4^5 : 4^3 = \frac{4^5}{4^3} = 4^{(5-3)} = 4^2 = 16$

Regel 3: **Bei gleichen Exponenten wird das Produkt oder der Quotient der Basen mit dem Exponenten potenziert:**

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \quad \text{oder} \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Beispiele:

$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$

$6^4 : 3^4 = \left(\frac{6}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$

1.4.4 Potenzieren und Radizieren

Potenzieren

Regel 4: Ein Produkt wird potenziert, indem jeder Faktor einzeln potenziert wird:	*Regel 5:* Ein Bruch wird potenziert, indem Zähler und Nenner einzeln mit dem Exponenten potenziert werden:	*Regel 6:* Eine Potenz wird potenziert, indem die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert wird:
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
z. B.: $(2a)^2 = 2^2 \cdot a^2 = 4a^2$	*z. B.:* $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$	*z. B.:* $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$

Radizieren

Radizieren ist die Umkehrung vom Potenzieren. Es gelten alle Potenzregeln.

„x hoch n gleich a" $\quad x^n = a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{a} = x \quad$ „n-te Wurzel aus a"

z. B.: $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[4]{16} = 2 \quad$ „4-te Wurzel aus 16"

Wurzelexponent $\rightarrow \sqrt[n]{a} \leftarrow$ **Radikand**

$\sqrt[2]{\ }$ $\Rightarrow$ Quadratwurzel wird ohne Wurzelexponent $\left(\sqrt{\ }\right)$ geschrieben: $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$